Problème. Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre unitaire, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. **Si** $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme d'algèbre non nul **alors**

$$\varphi(f) \in \sigma(f), \text{ pour tout } f \in A.$$

Que peut-on dire de la réciproque?

Cas réel. On note $C([0,1],\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre de Banach des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On note φ la forme linéaire de $C([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(f)=\int_0^1 f(x)\,dx, \text{ pour tout } f\in C([0,1],\mathbb{R}).$$

On sait que pour tout $f\in C([0,1],\mathbb{R})$ il existe $c\in\,]0,1[$ tel que $\varphi(f)=f(c)$. Il vient que

$$\varphi(f)\in\sigma(f), \text{ pour tout } f\in C([0,1],\mathbb{R}).$$

En revanche, φ n'est pas un morphisme d'algèbre.

Gleason, 1967. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire commutative. Si φ est un morphisme d'algèbre non nul alors*

$$\varphi\,(f) \in \sigma\,(f)\,,\ \textit{pour tout}\ f \in A.$$

Kahane-Zelasko, 1968. *le résultat de Gleason pour le cas non commutatif.*

Définition Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est dit **espace de Riesz complexe** s'il existe un espace de Riesz réel relativement uniformément complet, noté $\text{Re}\, E$, tel que

$$E = \text{Re}\, E \oplus i\, \text{Re}\, E.$$

Théorème *Si E est un espace de Riesz complexe, alors*

$$\sup \left\{ \text{Re}\left(e^{-i\theta}u\right) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

existe dans $\text{Re}\, E$ *pour tous* $u \in E$.

Définition Si E est un espace de Riesz complexe et $u \in E$ alors la borne supérieure ci-dessus est noté $|u|$ et est appelé **module** de u.

Définition Une forme linéaire φ sur un espace de Riesz complexe E est dite **réelle** si

$$\varphi(f) \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } f \in \mathrm{Re}\, E.$$

Définition Une forme linéaire φ sur un espace de Riesz complexe E est dite **positive** si

$$\varphi(f) \geq 0, \text{ pour tout } f \in \mathrm{Re}\, E \text{ avec } f \geq 0.$$

Remarque *Une forme linéaire positive φ sur un espace de Riesz complexe E est réelle.*

Définition Une forme linéaire φ sur un espace de Riesz complexe E est appelée **morphisme de Riesz** si $\varphi|u| = |\varphi(u)|$ pour tout $u \in E$.

Remarque *Un morphisme de Riesz $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, où E est espace de Riesz complexe, est positive et donc réel.*

Proposition *Soit φ une forme linéaire sur un espace de Riesz complexe E. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *φ est un morphisme de Riesz.*

(ii) *φ est réelle et $\varphi_{\mathbb{R}}$ est un morphisme de Riesz.*

(iii) *φ est positive et $\varphi(f)\varphi(g) = 0$ pour tout $(f, g)\,\mathrm{Re}\,E^2$ avec $f \wedge g = 0$.*

Définition Un espace de Riesz complexe A est appelé **algèbre de Riesz complexe** si A est muni d'une multiplication telle que

(1) Muni de cette multiplication, A est une algèbre complexe

(2) $|uv| \leq |u|\,|v|$ pour tout $(u,v) \in A^2$.

Théorème (Huijsmans, 1985) *Une espace de Riesz complexe A est une algèbre de Riesz complexe si, et set seulement si,* $\mathrm{Re}\, A$ *est une algbère de Riesz réelle (une ℓ-algèbre).*

Proposition (Huijsmans, 1995) *Si A est une algbère de Riesz complexe unitaire et si e est le neutre de A alors $e \in \mathrm{Re}\, E$.*

Définition Un algèbre de Riesz complexe A est appelée f-**algèbre** si, pour $u, v, w \in A$, on a

$$|u| \wedge |v| = 0 \Rightarrow |uw| \wedge |v| = |wu| \wedge |v| = 0.$$

Théorème (Beukers, Huijsmans, de Pagter, 1983) Une algèbre de Riesz complexe A est une f-algèbre si, et seulement si, $\mathrm{Re}\, A$ est une f-algèbre réelle. Toute f-algèbre complexe est commutative et $e \geq 0$ en cas d'existence.

Theoèrme (Azouzi, Boulabiar, 2010) Soit A une f-algèbre complexe a unité e et soit φ une forme linéaire sur A. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) φ *est un morphisme de Riesz et* $\varphi(e) = 1$.

(ii) φ *est un morphisme d'algèbre non nul.*

(iii) $\varphi(u) \in \sigma(u)$ *pour tout* $u \in A$.

Lemme (Beukers, Huijsmans, de Pagter, 1983) *Si A est une f-algèbre complexe et e est un neutre de A alors tout $u \in A$ véirfiant $|u| \geq e$ est inversible.*

Preuve du Théorème (i) $\Rightarrow$ (ii) Résultat bien connu (Huijsmans, de Pagter, 1984).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On a $\varphi(e)^2 = \varphi\left(e^2\right) = \varphi(e)$ et donc $\varphi(e) = 1$ ou 0. Si $\varphi(e) = 0$ alors $\varphi = 0$. Impossible. Donc, $\varphi(e) = 1$ et ainsi, si $u \in A$ alors

$$\varphi(u - \varphi(u)\,e) = 0$$

et donc $u - \varphi(u)\,e$ est non inversible.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Il est clair que $\varphi(e) = 1$. Soit $f \in \mathrm{Re}\, A$ avec $f \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} |f - ze| &= |(f - (\mathrm{Re}\, z)\, e) + i\,(\mathrm{Im}\, z)\, e| \\ &\geq |(f - (\mathrm{Re}\, z)\, e)| \vee |(\mathrm{Im}\, z)\, e| \\ &\geq \max\{|f - (\mathrm{Re}\, z)|\,, |(\mathrm{Im}\, z)|\}\, e. \end{aligned}$$

Si $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ ou $\mathrm{Im}\, z = 0$ et $\mathrm{Re}\, z < 0$ alors $f - ze$ est inversible. Donc, $\sigma(f) \in \mathbb{R}^{+}$ et, par (iii), $\varphi(f) \geq 0$. Il vient que φ est positive.

On suppose que φ n'est pas un morphisme de Riesz. Il existe alors $f, g \in \operatorname{Re} E$ tels que $f \wedge g = 0$ et $\varphi(f)\varphi(g) \neq 0$. On pose

$$a = \frac{1}{\varphi(f)} f \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{\varphi(g)} g.$$

Donc,

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 1 \quad \text{et} \quad a \wedge b = 0.$$

Par suite,

$$e = e - (a \wedge b) = (e - a) \vee (e - b) \leq |e - u + i(e - u)|.$$

Il en résulte que $|e - u + i(e - u)|$ est inversible. Donc,

$$0 \notin \sigma(e - u + i(e - u))$$

et ainsi

$$0 \neq f(e - u + i(e - u)) = 0.$$

Absurde !

Corollaire (Azouzi, Boulabiar, 2010) *Soit* X *un espace topologique et* φ *une forme linéaire sur* $C(X,\mathbb{C})$*. Alors* φ *est un morphisme d'algèbre non nul si, et seulement si,*

$$\varphi(f) \in f(X)\,, \text{ pour tout } f \in C(X,\mathbb{C})\,.$$

Le cas où X *est pseudo-compact découle du Théorème de Gleason, Kahane et Zelasko.*

Soit E un espace de Riesz complexe.

Définition Un sous-espace vectoriel I de E est appelé **idéal** de E si

$$|u| \leq |v| \text{ et } v \in I \text{ impliquent } u \in I.$$

Un idéal I de E est appelé **bande** (**de projection**) de E si $I \cap \operatorname{Re} E$ est une bande (de projection) de $\operatorname{Re} E$.

Proposition U*ne bande B de E est une bande de projection de E si, et seulement si, $E = B^d \oplus B$, où*

$$B^d = \{u \in E : |u| \wedge |v| = 0 \text{ pour tout } v \in B\}.$$

Définition Une sous-algèbre B d'une algèbre unitaire A est dite **pleine** si $u^{-1} \in B$ pour tout $u \in B$ inversible dans A.

Théorème (Azouzi, Boulabiar, 2010) *Soit* A *une* f*-algèbre complexe à unité* e*. Alors,* B_e*, la bande principale engendrée par* e *est une bande de projection et est une* f*-sous-algbèbre pleine de* A.

Preuve Basly-Huijsmans-de Pagter-Triki, 1986 + Lavric, 1993.

Théorème (Azouzi, Boulabiar, 2010) *Soit* A *une algèbre de Riesz complexe et* $e > 0$ *une unité de* A*. Si* φ *est une forme linéaire sur* A *alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) φ *est un morphisme de Riesz avec* $\varphi(e) = 1$.

(ii) $\varphi(u) \in \sigma(P_e(u))$ *pour tout* $u \in A$.

Preuve (i) $\Rightarrow$ (ii) Si $u \in B_e^d$ alors $|u| \wedge e = 0$ et donc

$$|\varphi(u)| \wedge 1 = |\varphi(u)| \wedge \varphi(e) = 0.$$

Ainsi, $\varphi(u) = 0$ et par suite

$$\varphi(u) = \varphi(P_e(u)), \text{ pour tout } u \in A.$$

En utilisant le théorème principal à B_e, on obtient

$$\varphi(u) = \varphi(P_e(u)) \in \sigma_e(P_e(u)).$$

Or, B_e est plaine et donc

$$\varphi(u) \in \sigma_e(P_e(u)) = \sigma(P_e(u)).$$

D'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) On a

$$\varphi(e) \in \sigma(P_e(e)) = \sigma(e) = \{1\}.$$

Donc, $\varphi(e) = 1$. De plus, si $u \in B_e$ alors $\varphi(u) \in \sigma(u)$ et si $u \in B_e^d$ alors $\varphi(u) \in \sigma(P_e(u)) = \{0\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(|u|) &= \varphi(|P_e(u)|) + \varphi(|u - P_e(u)|) \\ &= \varphi(|P_e(u)|) = |\varphi(P_e(u))| \\ &= |\varphi(P_e(u)) + \varphi(u - P_e(u))| = \varphi(|u|).\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.